DETERMINANTES.

Los determinantes fueron originalmente investigados por el matemático japonés Seki Kowa alrededor de 1683 y, por separado, por el filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz alrededor de 1693. Esta notación se utiliza en casi todas las ramas de las matemáticas y en las ciencias naturales.

El determinante es una función que asocia a cada matriz cuadrada un número real. La función determinante tiene como dominio el conjunto de las matrices cuadradas y como recorrido el conjunto de los números reales. Si A es una matriz cuadrada, el determinante de A se representa por $|A|$.

Así, si A es una matriz 2x2 , se define el determinante de A como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Por ejemplo.

Evaluar el valor del determinante de la matriz cuadrada dada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3*2 - 5*4 = 6 - 20 = -14$$

Si A es una matriz 3x3, el determinante se define como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Evalué el determinante de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Si el orden de la matriz es superior a 3, el calcular el valor del determinante por los procedimientos descritos anteriormente suelen tornarse tediosos, es por eso que el desarrollo de estos determinantes se simplifica al tratar de reducir los determinantes al orden 2x2. las siguientes definiciones conducen a calcular determinantes de una manera más práctica.

MENOR DE UN DETERMINANTE: si a_{ij} es un elemento de una matriz cuadrada A de orden nxn, entonces se define el menor del elemento a_{ij}, denotado por M_{ij}, al determinante que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que aparece el elemento a_{ij}. Así para el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

el menor del elemento a_{23} , se obtiene al suprimir la segunda fila y la tercera columna, esto es:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

El menor del elemento a_{31} , se obtiene al suprimir la tercera fila y la primera columna:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Determine el menor de los elementos 5 , 7 , 3 y 4 en el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -3 & -2 \\ 2 & 8 & -5 & 7 \\ 1 & 5 & -7 & -1 \\ 0 & 6 & -10 & 4 \end{vmatrix}$$

COFACTOR: Si a_{ij} es un elemento de una matriz cuadrada A de orden nxn, y M_{ij} es el menor de a_{ij}, entonces el cofactor del elemento a_{ij}, denotado por C_{ij}, se define como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

Por ejemplo, el cofactor del elemento a_{23} en la matriz dada es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Mediante el empleo de los conceptos de menor y cofactor, es posible reducir los determinantes hasta obtener un determinante de orden 2x2 , lo cual simplifica el procedimiento para encontrar el valor del determinante de cualquier matriz cuadrada.

DEFINICIÓN. Si **A** es una matriz cuadrada de orden nxn, entonces el determinante de **A** es la suma de los n productos obtenidos al multiplicar cada elemento en cualquier fila o columna por su cofactor. Es decir, si A es una matriz cuadrada, entonces el determinante de A es:

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}C_{in}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

Ejemplo: encontrar el determinante de la matriz dada.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

evaluamos el determinante por medio de cofactores, tomando como base la segunda fila.

Los cofactores de los elementos –2 , 4 , y –3 son:

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3((-1)*6-2*5) = (-1)(-6-10) = 16$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^4(3*6-4*2) = (1)(18-8) = 10$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5(3*5-4(-1)) = (-1)(15+4) = -19$$

luego el determinante de la matriz dada es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

$$|A| = (-2)(16) + (4)(10) + (-3)(-19)$$

$$|A| = -32 + 40 + 57 = -32 + 97 = 65$$

Halle el valor del determinante, tomando los cofactores de la tercera columna.

ACTIVIDAD.

Encontrar el determinante de las matrices dadas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Determine el valor de la incógnita.

$$\begin{vmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad ; \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 8 \quad ; \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:

Los determinantes cumplen las siguientes propiedades.

1. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces el determinante es igual a cero.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = a*b - a*b = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = a*(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + a*(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + d*(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$= a(bf - ec) - a(bf - ec) + d(bc - bc)$$

$$= abf - aec - abf + aec + d(0) = 0$$

PARA REFLEXIONAR: Como afectaría esto sise tratara de un sistema de ecuaciones lineales.

2. Si en una matriz cuadrada, los elementos de una fila o una columna son todos iguales a cero, entonces su determinante es igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0*C_{11} + 0*C_{12} + 0*C_{13} = 0$$

3. Si en un determinante se intercambian dos filas o dos columnas, entonces el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(-bc + ad) = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

PARA REFLEXIONAR: Que sucede con las soluciones de un sistema si se cambian de orden dos ecuaciones. Cómo repercutiría esto al aplicar la regla de Cramer.

4. Si los elementos de una fila o una columna de un determinante se multiplican por una constante k, entonces el determinante queda multiplicado por esa constante.
5. Si se reemplaza una fila (o una columna) de un determinante por la suma de esa fila (o esa columna) y k veces otra fila (u otra columna), entonces el determinante no varia.
6. Una matriz **A** y su transpuesta tienen el mismo determinante. $Det(A) = Det(A^T)$.
7. Si A es una matriz nxn y k es un escalar cualquiera, entonces $Det(kA) = k^n Det(A)$
8. El determinante de un producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de los factores, es decir: $Det(AB) = Det(A)Det(B)$.
9. Si A es una matriz invertible, entonces $Det(A^{-1}) = \dfrac{1}{Det(A)}$.
10. Si A y B son dos matrices del mismo tamaño: entonces, el determinante de la suma de las matrices es diferente a la suma de los determinantes de las matrices dadas. Es decir: $Det(A+B) \neq Det(A) + Det(B)$
11. Si una matriz cuadrada es de forma triangular, entonces su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

REGLA DE CRAMER:

Uno de los usos más conocidos de los determinantes es en la solución de sistemas lineales. El procedimiento usado se conoce como regla de Cramer. Para ilustrar la Regla de Cramer, consideremos un sistema lineal 2x2, de la forma:

$$a_1 x + b_1 y = k_1$$
$$a_2 x + b_2 y = k_2$$

En donde por lo menos un coeficiente de las variables es diferente de cero. Solucionando el sistema por el método de Gauss, se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & : & k_1 \\ a_2 & b_2 & : & k_2 \end{bmatrix}$$

al reemplazar la segunda fila por la suma de $-a_2$ veces la primera fila y a_1 veces la segunda, la matriz se transforma en:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & : & k_1 \\ 0 & a_1b_2 - b_1a_2 & : & a_1k_2 - a_2k_1 \end{bmatrix}$$

y al reemplazar la primera fila por la suma de $-(a_1b_2 - b_1a_2)$ veces la primera fila y b_1 veces la segunda, la matriz se transforma en:

$$\begin{bmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & : & b_2k_1 - b_1k_2 \\ 0 & a_1b_2 - b_1a_2 & : & a_1k_2 - a_2k_1 \end{bmatrix}$$

con lo que se pueden obtener las soluciones a las variables, así.

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x = b_2k_1 - k_2b_1$$
$$de\,donde$$
$$y = \frac{b_2k_1 - k_2b_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$(a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1k_2 - a_2k_1$$
$$de\,donde$$
$$y = \frac{a_1k_2 - a_2k_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Las soluciones encontradas, se pueden expresar a partir de la definición de los determinantes como los siguientes cocientes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad ; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

esta forma de encontrar la solución a un sistema lineal se conoce como la Regla de Cramer.

Para aplicar la regla se Cramer se siguen los siguientes pasos:

- Hallar la matriz ampliada (A | b) asociada al sistema lineal, esto es: que la primera columna esté formada por las entradas de los coeficientes de la primera incógnita de las ecuaciones; que la segunda columna la formen los coeficientes de las segundas incógnitas, y así hasta llegar a la última columna, que estará constituida por los coeficientes de los términos independientes de las ecuaciones.
- Calcular el determinante de la matriz A (formada por los coeficientes)
- Para encontrar el valor de la primera incógnita, sustituir la primera columna del determinante A por los términos independientes y dividir este resultado por el determinante de A.
- Continuar sustituyendo los términos independientes en las distintas columnas del determinante de A, hasta hallar el resto de las incógnitas.

Por ejemplo: encontrar la solución al sistema: $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$

el determinante de A es:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = 3(-3) - 4 * 5 = -9 - 20 = -29$$

la solución al sistema es:

$$x=\frac{\begin{bmatrix}18 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix}}=\frac{18(-3)-4(1)}{3(-3)-5*4}=\frac{-54-4}{-29}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$y=\frac{\begin{bmatrix}3 & 18\\ 5 & 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix}}=\frac{3*1-18*5}{3(-3)-5*4}=\frac{3-90}{-29}=\frac{-87}{-29}=3$$

ACTIVIDAD: RESOLVER APLICANDO LA REGLA DE Cramer LOS SIGUIENTES SISTEMAS LINEALES:

$$\begin{cases}3X+4Y-5Z=12\\ 2X-3Y+Z=10\\ 4X+3Z-2Y=14\end{cases}\qquad \begin{cases}2X-Y+3Z=5\\ 3X-2Y+7Z=3\\ 3X-Y+2Z=10\end{cases}\qquad \begin{cases}X+Y+Z=2\\ X+2Y+Z=3\\ X+Y-Z=2\end{cases}$$

APLICACIONES. En geometría analítica los determinantes desempeñan un papel básico en la determinación de áreas, volúmenes y en la formulación de ecuaciones de objetos geométricos como rectas, circunferencias, elipses, parábolas, planos y esferas. Veamos algunos de ellos.

1) **ECUACION DE UNA RECTA**. Sean los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La ecuación de la recta que pasa por los dos puntos es de la forma $Ax + By + C = 0$. Como los puntos dados deben satisfacer la ecuación de la recta, tenemos el sistema lineal:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es no trivial si y solo si:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollo que conduce a la ecuación de una recta.

2. **PUNTOS ALINEADOS**. Sean los puntos (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) (x_3, y_3) se dice que los puntos estan en la misma recta, si y solo si:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. **ECUACION DE UNA CIRCUNFERENCIA.** Sean (x_1, y_1) ;(x_2, y_2) (x_3, y_3) Tres puntos de una circunferencia. Como la ecuación de la circunferencia es de la forma $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ para determinarla se desarrolla el determinante.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2+y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2+y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2+y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. **ECUACION DE UNA PARABOLA**. Dado que la ecuación de una parábola es de la forma $Ay + Bx^2 + Cx + D = 0$, la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (x_1, y_1) ;(x_2, y_2) (x_3, y_3) viene dada por el desarrollo del determinante.

$$\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ y_1 & x_1{}^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2{}^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3{}^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5. **ECUACION DE UN PLANO.** Si (x_1, y_1, z_1) ;(x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) son tres puntos del espacio, entonces como la ecuación del plano que los contiene es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, para determinarla solucionamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Actividad.

Aplicar la definición en determinantes para encontrar.

1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos
   a) $(1,2)$, $(4,5)$
   b) $(2,3)$, $(-1,1)$
2) La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos
   a) $(2,3)$, $(4,1)$, $(6,3)$
   b) $(10,0)$, $(6,4)$, $(4,3.5)$
3) La ecuación del plano que contiene a los puntos
   a) $(2,3,4)$, $(5,2,1)$, $(-2,2,4)$
   b) $(1,-1,1)$, $(2,4,5)$, $(-2,3,-2)$
4) Indicar si los puntos dados están alineados
   a) $(2,3)$, $(4,1)$, $(-2,3)$
   b) $(1,5)$, $(-1,1)$, $(-2,-1)$